© REVISTA INTERNACIONAL DE CIÊNCIAS, TECNOLOGIA E SOCIEDADE 2020, vol. 3, n. 1, pp. 16-31 ISSN 2184-4569

https://doi.org/10.37334/ricts.v3i1.29

AMBIENTES COMPUTACIONAIS E A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UM DIÁLOGO INTERESSANTE PARA O TRATAMENTO DOS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Computational Environments and the Problem-Solving Perspective: An Interesting Dialogue for the Treatment of Mathematical Concepts

PUINDI, António[1], MANUEL, Ângelo[2], TÉTICA, Mateus,[3] & TATI, Victor[4]

Resumo

A Matemática, no sentido amplo, engloba infinitos componentes que fazem dela uma das ciências mais reais e completas que contribuem para o desenvolvimento do intelecto humano. Esta visão obriga ao professor enfrentar o Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática, de forma que implique a participação activa dos alunos com o espírito de investigação e de descobertas, dando o seu significado segundo o contexto do aluno e da respectiva sociedade, para tornar o seu ensino mais atraente para alcançar o pleno desenvolvimento. Este trabalho apresenta uma abordagem metodológica que combina a perspectiva da resolução de problemas e o ambiente computacional como recurso metodológico na sala de aula para o tratamento dos conceitos matemáticos. A abordagem proposta é aplicada para o tratamento dos principais conceitos do cálculo infinitesimal no Segundo Ciclo do Ensino Secundário, usando o *GeoGebra*.

Abstract

Mathematics, in the broad sense, encompasses infinite components that make it one of the most real and complete sciences that contribute to the development of the human intellect. This view requires the teacher to face the process of teaching and learning mathematics in a way that implies the active participation of students with the spirit of research and discovery, giving its meaning according to the context of the student and their society; make their teaching more attractive to achieve full development. This work presents a methodological approach that combines the problem solving perspective and computational environments as a methodological resource in the classroom for treatment of mathematical concepts. The proposed approach is applied to the treatment of the main concepts of infinitesimal calculus, in the Second Cycle of Secondary Education, using *GeoGebra*.

Palavras-chave: *Ambientes tecnológicos; GeoGebra; Processo ensino-aprendizagem; Resolução de problemas.*

Key words: *GeoGebra; Problem Solving; Teaching-Learning Process, Technological Environments*.

Data de submissão: Janeiro de 2020 | **Data de publicação**: Março de 2020.

[1] ANTÓNIO CASIMIRO PUINDI – Instituto Superior de Ciências da Educação (ISCED-Cabinda). Universidade 11 de Novembro, ANGOLA. E-mail: acpuindi@gmail.com.

[2] ÂNGELO DO ROSÁRIO NKANO MANUEL – Instituto Superior de Ciências da Educação (ISCED-Cabinda). Universidade 11 de Novembro, ANGOLA. E-mail: angelodorosarionkanomanuel@gmail.com.

[3] MATEUS MASSANGA TÉTICA – Instituto Superior de Ciências da Educação (ISCED-Cabinda). Universidade 11 de Novembro, ANGOLA. Email: mateustetica@gmail.com.

[4] VICTOR DO ESPÍRITO SANTO IMACULADA TATI – Instituto Superior de Ciências da Educação (ISCED-Cabinda).Universidade 11 de Novembro, ANGOLA. E-mail:victordoespiritosanto8@gmail.com.

INTRODUÇÃO

O processo de instrução e educação que se opera na transmissão e apropriação dos conhecimentos, habilidades e capacidades matemáticas constitui o objecto de estudo da *Metodologia de Ensino da Matemática* (Pedroso et al., 2001, p. 6), onde a *Didáctica* providencia as ideias e directrizes fundamentais, com base nas quais o ensino ocorre. Entretanto, como a Matemática engloba infinitos componentes que fazem dela uma das ciências mais reais e completas que contribuem para o desenvolvimento do intelecto humano, o método do seu ensino consiste na maneira como o professor organiza e gerencia o Processo de Ensino e Aprendizagem, a maneira como facilita a interacção com os alunos, a fim de atingir os objectivos estabelecidos (Hasan & Tamer, 2012; Mathdebate Project, 2017). Esta visão obriga aos professores enfrentarem o Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática de forma que implique a participação activa dos alunos com o espírito de investigação e de descobertas, dando, assim, o seu significado segundo o contexto dos alunos e da respectiva sociedade, para tornar o seu ensino mais atraente para alcançar o pleno desenvolvimento.

O século XX entrou para a história com a inegável marca de um século no qual houve um desenvolvimento acelerado da tecnologia electrônica, especialmente da informática e, por consequência, dos computadores, que têm exercido um papel fundamental na formação de profissionais das mais diversas áreas (Follador, 2007, p. 35). Essa marca permitiu que hoje os alunos tivessem um amplo acesso às mídias sociais e vários motores de buscas. A presença da Internet abriu e criou um novo mundo no processo de ensino e aprendizagem das ciências – o mundo tecnológico, o que faz com que os alunos estejam mais inclinados a aceitar os conteúdos fornecidos através de ambientes digitais. Especialmente a Matemática, onde vários contéudos exigem do aluno muita imaginação, eles estão muitas vezes desmotivados a aprender quando o assunto não é fornecido de maneira moderna e acessível (Dariusz, 2014, p.51). Este cenário é hoje uma realidade mundial e se constiui num desafio metodológico para os professores de matemática, particularmente (Follador, 2007; Hohenwarter & Jones, 2007; Hohenwarter & Lavicza, 2007; Kurnik, 2008; Güyer, 2008; Dikovic, 2009; Ross & Bruce, 2009; Reis, 2010; Antohe, 2010; Rolkouski, 2011; Zengin, Furkan, & Kutluca, 2012; Majerek, 2014; Dariusz, 2014).

Há mais de uma década, fruto da nossa prática na formação de professores do Ensino Geral, específicamente o II Ciclo do Ensino Secundário, foi possível constatar que a maioria dos alunos engressados no Ensino Superior, para frequentar o curso de licenciatura em Ensino da Matemática no ISCED – Cabinda apresenta dificuldades do tipo: (i) conhecimento confuso dos conceitos matemáticos e sua relação com o mundo real das coisas; (ii) dificuldades de interpretar os conceitos geomentricamente; (iii) dificuldades em definir e aplicar correctamente os conceitos na resolução de problemas; (iv) nem sempre são capazes de diferenciar as definições dos teoremas. Essas dificuldades também foram constatadas pelo Dariusz (2014, p. 52) no seu trabalho intitulado: *Application of Geogebra for Teaching Mathematics*. Nas escolas angolanas, essas dificuldades são, em geral, influenciadas pelo modelo tradicional do ensino da matemática, particularmente, onde ainda prevalece (também): (i) o modelo de abordagem de conceitos matemáticos sem uma ilustração adequada e sua conexão com os problemas do mundo real; (ii) a construção e análise de gráficos matemáticos estáticos – simplesmente os desenhar no quadro para que o aluno as copie no caderno; quando se sabe que os objectos estáticos não permitem, com facilidade, a generalização do conceito (Dariusz, 2014, p. 52). Diante desse dilema, o professor de matemática é confrontado com a responsabilidade de facilitar a transferência do reflexo mental para o reflexo verbal (dos alunos) usando procedimentos metodológicos apropriados, ou seja, privilegiar: (i) as situações que permitam a conexão do conhecimento matemático com o mundo real das coisas; (ii) a visualização, a analogia e a generalização para o desenvolvimento do pensamento matemático nos alunos.

A *Lei de Bases do Sistema de Educação* angolana expressa a necessidade de desenvolver o pensamento lógico e abstracto e a capacidade de avaliar a aplicação de modelos científicos na resolução de problemas da vida prática, por forma a potenciar nos alunos a capacidade de responder às necessidades do país e à evolução tecnológica. Não obstante ao que se referia atrás, são ainda bastante visíveis as deficiências didáctico-metodológicas no trabalho dos professores de matemática de Angola, no que tange à forma de tratamento dos conceitos matemáticos e sua contextualização. Os professores angolanos precisam sair da caixa negra – a caixa da excessiva dependência da maneira de ensinar os conceitos matemáticos sugeridos nos livros-texto que promovem a repreensão da criatividade dos professores. Um cenário possível para esse problema é, de facto, a aderência e uso de tecnologias que proporcionam ambientes dinâmicos para se trabalhar os conceitos matemáticos na sala de aula, conforme o *Conselho Nacional de Professores de Matemática* (NCTM), que é a maior associação mundial de professores de matemática, que declarou a Tecnologia como um de seus seis princípios para a matemática escolar. Reconheceu, ainda, que a tecnologia influencia positivamente a matemática ensinada na sala de aula e melhora o aprendizado dos alunos. Há, portanto, uma elevada necessidade de integrarmos o computador na escola angolana, com vista a promover um ensino mais significativo e darmos resposta à necessidade expressa na *Lei de Bases do Sistema de Educação* angolano.

Com este trabalho pretendemos mudar a mentalidade dos professores angolanos através de um novo projecto metodológico de ensino da matemática baseado no enfoque *CEPSol* – iniciais de *Computational Environments and Problem Solving*. Trata-se de um enfoque que combina duas perspectivas: a de resolução de problemas, na visão de George Polya (1945) e Schroeder & Lester (1989), e a do uso de ambientes de *softwares* dinâmicos como *GeoGebra* para o ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos. De acordo com o trabalho experimental levado a cabo no II Ciclo do Ensino Secundário, concretamente na Escola de Magistério "Suka-Hata" de Cabinda, curso de Ensino da Matemática e Física, ficou evidente que o enfoque *CEPSol* pode oferecer várias possibilidades para os professores de Matemática, desde o desenvolvimento das habilidades de resolver problemas e do desenvolvimento do pensamento criativo, permite que o aprendizado dos alunos seja envolvente, interativo, colaborativo em trabalhos independentes e de pesquisa. O restante do trabalho está constituido como se segue: Secção II apresenta alguns procedimentos científicos importantes para construção dos conceitos matemáticos. Enfatiza a importância de se construir os conceitos matemáticos através da resolução de problemas reais e o uso das tecnologias para a visualização dos conceitos. Os resultados das aulas observadas estão detalhados na Secção III, que inclui os resultados da avaliação do nível de satisfação do enfoque. E, por conseguinte, a secção IV apresenta a conclusão.

1. CONCEITOS MATEMÁTICOS E SEU APRIMORAMENTO

Os conceitos são uma categoria especial do ensino da matemática, por constituirem a forma fundamental com que se opera o pensamento matemático que reflecte as características importantes dos objectos estudados. Assim, a análise, síntese, abstração e generalização são alguns procedimentos do processo gradual da formulação de um conceito matemático. Isto significa que qualquer conceito, após uma análise cuidadosa, se desenvolve através da abstração das características dos objectos que existem na natureza e da generalização (Pedroso et al., 2000; Kurnik, 2008).

Ao ensinar um conceito matemático, o professor conduz os alunos a observação e análise das partes que formam o seu conteúdo e sua extensão. Recomenda-se que seja um conteúdo mínimo, conciso, natural e aplicável. Mas, existem dois pontos críticos ao se fazer o tratamento de um conceito matemático, que são segundo Kurnik (2008, p. 423): "(i) a transição para o nível em que o procedimento de abstração começa, uma vez que a transferência do concreto para o abstrato é bastante difícil para alguns alunos; (ii) a formulação do conceito como parte da consciência humana". Essa formulação é inevitável de se expressar por palavras e/ou usar símbolos, e, o cuidado na linguagem é fundamental, pois, pode haver imprecisão.

Um terceiro ponto crítico e bastante fundamental na hora de se trabalhar o conceito matemático, tem a ver com a *visualização do pensamento*. A prática de ensino na realidade angolana mostra que durante a aula, os professores de matemática se limitam a trabalhar o conceito no quadro e de forma estática, mesmo que envolvendo representações geométricas para análise, e as seguintes frases são bastante usadas: "a análise mostra", "vamos dar uma olhada em alguns exemplos concretos", "análogo à, concluímos que", "esse resultado é uma generalização de", etc. Obviamente, os alunos costumam ter dificuldades de entender essas frases. Os professores também não têm métricas para verificarem o nível de compreensão dos alunos. Este é, portanto, o paradigma clássico, associado à forma abstracta de tratamento dos conceitos matemáticos, que ainda predomina fortemente na escola angolana, mas que precisa ser modernizado.

1.1. Introdução do conceito matemático através da resolução de um problema

A falta de clareza com relação à importância que a matemática desempenha no corpo de conhecimentos sistematizados e na realidade objectiva dos alunos tem sido, a todo o custo, um dos principais responsáveis pelas dificuldades crónicas de que padece o seu ensino e da própria imagem que se tem (Machado, 2001). Os professores de Matemática não têm a mínima dúvida de que a matéria que ensinam perpassa outras ciências. Situações como estas fazem com que, às vezes, os alunos não se mostram impressionados, em especial ao descobrirem que a vasta maioria de colegas consegue passar perfeitamente sem nunca ter analisado ou conhecido, por exemplo, o significado da "derivada" de uma função. Apenas necessitam de se aperceber da pesada ênfase atribuída à solução de equações e esforçam-se por evitar os cursos onde a Matemática esteja presente. Em consequência, muito menos alunos enveredam pelos cursos de matemática ou engenharias dos que lucrariam se os fizessem.

Há diferentes concepções sobre o termo *resolução de problemas*, das quais se consideram três formas de aborda-la: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar através da resolução de problemas (Schroeder & Lester, 1989). Para o enfoque *CEPSol*, o sentido em que se emprega o termo "resolução de problema" se move para concepção de *Ensinar* os conceitos matemáticos Através *da Resolução de Problemas*. Isto é, estabelecer um problema cuja resolução produz um novo conhecimento matemático. Não se trata de problematizar o objecto de ensino, nem de estabelecer problemas complexos que requerem novos conhecimentos matemáticos. Trata-se de resolver um problema matemático relacionado com o objecto em estudo sem se confundir com ele, mas que vai conformando de imediato para nova aprendizagem; que deve produzir um novo conhecimento. Nós combinamos esse enfoque com o ambiente dinâmico de *GeoGebra* para o tratamento de conceitos matemáticos, conforme as actividades práticas da Secção III.

1.2. Quando pelo quadro e giz não contamos a história toda

O quadro é um meio didáctico quase sempre presente nas salas de aulas das escolas, tomado como um excelente recurso visual e para troca de conhecimentos. Ainda é o único instrumento didáctico presente nas salas de aulas da maior parte das escolas angolanas.

Quando o objectivo é *visualizar o conceito*, tornando o pensamento do aluno uma parte explícita do discurso da sala de aula de uma maneira natural e gerenciável, o quadro torna-se um recurso impotente para tal propósito, pois, os processos visuais feitos através do quadro são estáticos. Assim, um dos recursos modernos que ajuda potenciar esse processo, o de visualização dos conceitos que torna o pensamento do aluno visível, chama-se *Computador*, através do uso de *softwares* dinâmicos como *GeoGebra.* Sim, quando os professores de matemática da escola angolana souberem quais são os potenciais do *GeoGebra* e como este *software* pode melhorar significativamente o nível de motivação dos seus alunos em aprender a matemática, muitos professores se esforçarão para se tornarem proficientes.

O *GeoGebra* fornece um ambiente de aprendizagem dinâmica e eficaz para visualização dos conceitos, uma vez que inclui os recursos simbólicos e de visualização, que facilitam o despertar da curiosidade dos alunos para motivá-los a aprender os conteúdos, e gradualmente para que aprendam a analisar, sintetizar, abstrair, induzir, deduzir e generalizar os conceitos, que são habilidades fundamentais para o desenvolvimentodo do pensamento matemático nos alunos (Waxman, Connell, & Gray, 2002). Mas, o papel mais relevante do *GeoGebra* quando usado para o ensino da matemática é afirmado como "facilitador do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos abstratos"; uma vez que permite desenvolver habilidades espaciais e de percepção, prevendo os teoremas e as propriedades, bem como para melhorar os níveis do pensamento intuitivo e a verificação de novas idéias. Com o uso do *GeoGebra*, os professores conseguem perceber o pensamento do aluno e o seu poder de raciocínio, e, é mais provável que descubram o conceito errôneo existente por trás do conhecimento prévio que o aluno carrega na sua imaginação (Kllogjeri, 2015).

2. EXPERIÊNCIAS EM SALA DE AULA

Inicialmente dois alunos finalistas, entre os melhores do Curso de Ensino da Matemática do Instituto Superior de Ciências da Educação-Cabinda 2019, foram selecionados para leccionarem o tópico relacionado com o conceito da derivada aos alunos do Curso de Ensino da Matemática e Física da EMC (Escola de Magistério "Suka-Hata" de Cabinda). O primeiro fê-lo aplicando a metodologia clássica, conforme a subsecção III.1. O segundo abordou o tópico usando o enfoque *CEPSol*, subsecção III.2.

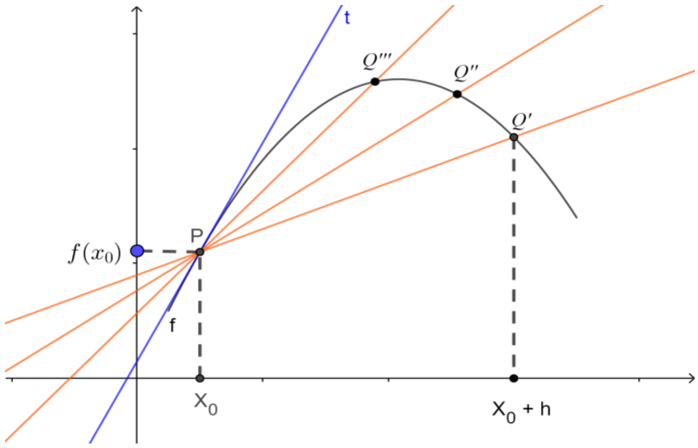
O objectivo principal foi o de contrastar o enfoque *CEPSol* da metodologia clássica e avaliar o seu impacto. Foi feita a avaliação do nível de satisfação dos alunos com relação à implementação do enfoque, subsecção III.3. A seguir apresenta-se, em síntese, a abordagem do conceito da derivada usando as duas metodologias. Usaremos os acrônimos *Prf* e *Aln* para designar a fala do professor da fala dos alunos.

3. METODOLOGIA CLÁSSICA

3.1. Aspectos observados da aula

Na etapa de Asseguramento do Nível de Partida (ANP), o professor (aluno seleccionado) revisou o cálculo de limite de uma função, e de seguida comentou sobre o **problema da tangente**, formulado na seguinte forma: *Como traçar uma recta tangente a uma curva num dado ponto?* Informou que a solução para esse problema consiste em aproximar uma recta secante a essa tângente desejada. Desenhou no quadro uma figura de análise, similar a Figura 1, e, proferiu considerações conforme transcrevemos a sua fala a seguir:

Figura 1: O problema da tangente a uma curva de f num dado ponto.



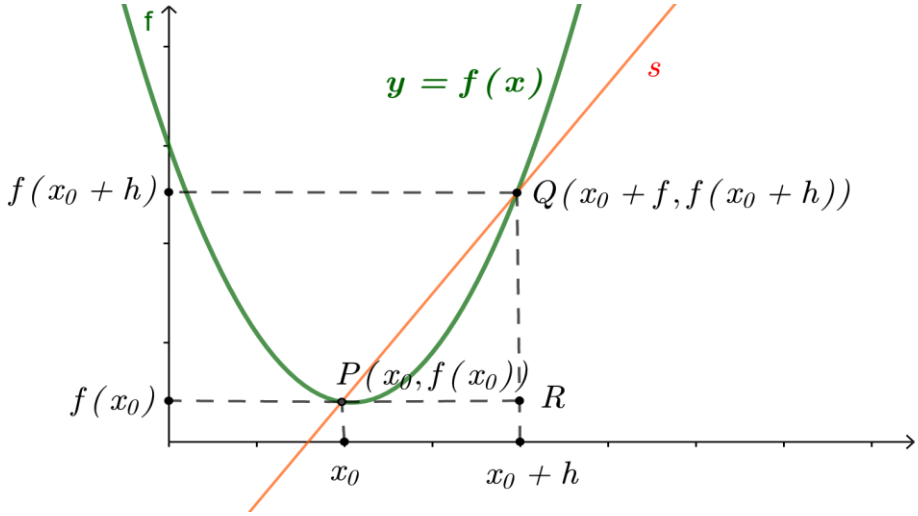
Fonte: Figura gerada com o ambiente de *GeoGebra*.

"Consideremos uma função f cujo gráfico é a curva preta, e queremos traçar uma recta tangente a essa curva no ponto P. P é um ponto fixo de coordendas $(x_0, f(x_0))$. Pense em uma recta secante sobre a curva da função f. Para obtermos essa recta, precisamos de mais um ponto, o ponto Q', com coordenadas $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Agora, imagine a abcissa $x_0 + h$ tomar valores que se aproximam ao valor de x_0, o que acontece com a recta secante PQ? Obviamente, o ponto Q $(= Q', Q'', Q''')$, em linha laranja, vai se aproximando ao ponto P; consequentemente, a recta secante PQ vai se aproximando à recta tângente em azul. De concreto, "podemos concluir que" a recta tangente à curva f no ponto P é a posição limite da recta secante PQ, quando $\Delta x \to 0$, onde $\Delta x = x_0 + h - x_0$ é a variação de x. [Prf]".

Para formalizar o conceito da derivada, o professor chama a atenção dos alunos para análise da Figura 2, que introduz o conceito da taxa média de variação. Transcrevemos a seguir a sua fala:

> *"Veremos em breve como o problema da tângente pode ajudar-nos a chegar à definição da derivada. Mas, antes precisamos falar sobre a taxa média de variação de uma função. Reparem na Figura 2. Temos aqui uma função $f(x)$ e queremos calcular a taxa média de variação dessa função no intervalo de x_0 até x. Como eu calculo essa taxa média de variação? Precisamos dividir a variação nos valores de $f(x)$ pela variação nos valores de x. Esta variação corresponde ao denominado coeficiente angular da recta secante PQ, que é igualmente a tangente do ângulo α, formado pelos segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, dada por $m_s = tan(\alpha) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. [Prf]".*

Figura 2: Taxa média de variação de uma função f.



Fonte: Figura gerada com o ambiente de *GeoGebra*.

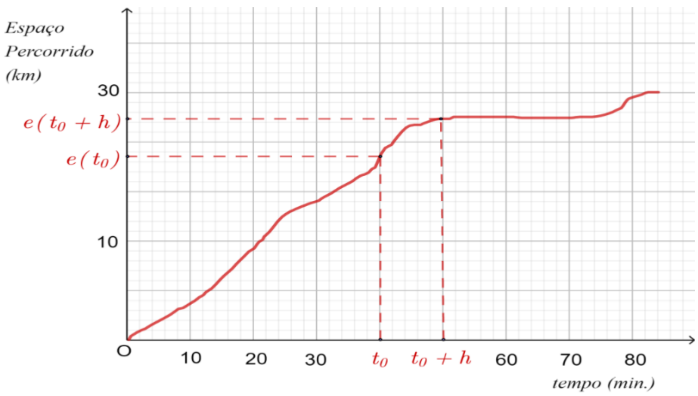
> *"Retomemos agora o problema da tangente, Figura 1. Como os $Q's$ ($= Q', Q'', Q'''$) se aproximam ao ponto P, os valores de $x_0 + h$ também se aproximam a x_0. Assim temos o seguinte: quando as rectas (t e PQ) sobrepõem-se, ficamos com um declive da recta secante rigorosamente igual ao declive da recta tangente, o que permite concluirmos que quando o $h \to 0$ ($h = x - x_0$), a fração $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tende para o declive da recta tangente. Dito de outra forma, o limite quando $h \to 0$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função no ponto P, dado por*
>
> $$m_s = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$
>
> *Esse limite é também chamado de taxa de variação instantânea. [Prf]"*

3.2. Enfoque CEPSol: aspectos observados da aula

Inicialmente, o professor consolidou os conceitos da Física relacionados com a velocidade média e velocidade instantânea. De seguida, apresentou um problema que descreve o espaço e, em função do tempo t, percorrido pelo ciclista em relação ao ponto de partida (cidade *A* para cidade *B*), e o formulou como se segue (transcrição da fala do professor e dos alunos):

> *"Consideremos o seguinte problema: um ciclista desloca-se à velocidade constante de $30km/h$ em terreno plano, a menor velocidade nas subidas e a maior velocidade nas descidas. Estamos perante um problema da Física. Recorrendo ao gráfico da Figura 3, como determinar a velocidade média a que se deslocou o ciclista nos intervalos de tempo, por exemplo, [0,40], [40,50] e [50,80]? [Prf]"*

Figura 3: Espaço percorrido pelo ciclista, em relação ao ponto de partida.



Fonte: Figura gerada com o ambiente *GeoGebra*.

Através de perguntas de impulso, os alunos eram estimulados para interpretação consciente do texto do problema. A seguir, transcrevemos a fala dos alunos e do professor.

> *"A cada instante t está associado um espaço $e(t)$ percorrido pelo ciclista na sua deslocação de A para B" [Aln].*

> *"No instante t_0, por exemplo, o ciclista já percorreu o espaço $e(t_0)$ e no instante $t_0 + h$, o espaço percorrido será $e(t_0 + h)$. Define-se assim uma função $e: t \to e(t)$. [Prf]"*

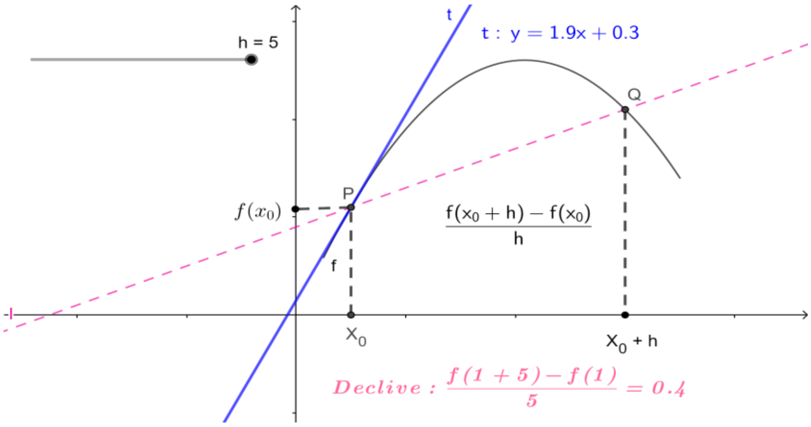
> *"Para determinarmos a velocidade média do ciclista, basta observarmos a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto no percurso, e determinar o seu quociente. Assim, a velocidade média entre os instantes t_0 e $t_0 + h$ é dada pelo quociente, [Prf]"*

$$\frac{e(t_0 + h) - e(t_0)}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{e(t_0 + h) - e(t_0)}{h} \qquad (2)$$

"Consideremos a Figura 4 (figura projectada com GeoGebra). Observamos a recta tangente t ao gráfico da função f representada a azul e uma recta secante PQ. Para fazer o declive da recta secante basta atender às coordenadas do ponto Q e do ponto P. Uma vez que o ponto P tem de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e o ponto Q tem de coordenadas $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, precisamos somente subtrair a ordenada do ponto Q à ordenada do ponto P e dividir pela abcissa do ponto Q menos a abcissa do ponto P para obtermos $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.[Prf]"

"Como se pode notar, a fracção $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ é a velocidade média do ponto de vista da Física. [Prf]"

Figura 4: Interpretação geométrica do conceito da derivada da função f, usando *GeoGebra*.

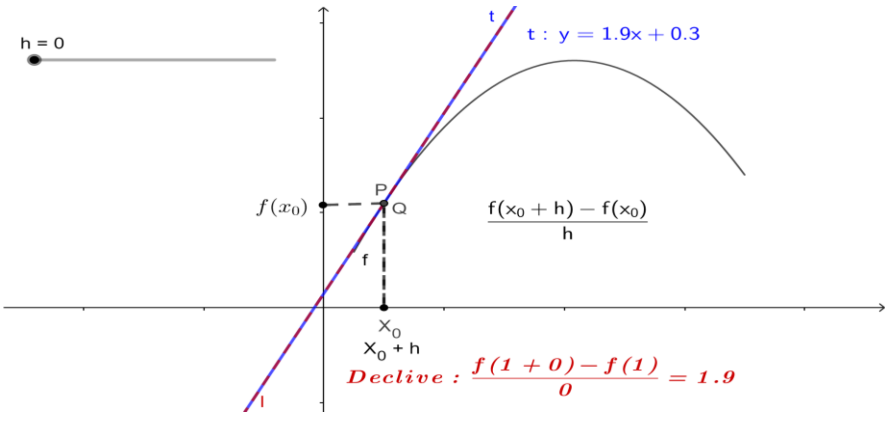


Fonte: Figura gerada com o ambiente de *GeoGebra.*

"O que acontece com o ponto Q e ao declive da secante se considerarmos que a abcissa $x_0 + h$ toma valores que se aproximam do valor da abcissa x_0? Observemos o gráfico (com o selector, o professor executa as simulações programadas com GeoGebra). [Prf]"

"O ponto Q se aproxima do ponto P, consequentemente, o declive da secante PQ se aproxima do declive da tangente, Figura 5. [Aln]"

Figura 5: Avaliação do comportamento do declive da recta secante face ao declive da tangente à curva da função f.



Fonte: Figura gerada com o ambiente de *GeoGebra.*

Quando as rectas (t *e* PQ) *sobrepõem-se, ficamos com um declive da recta secante rigorosamente igual ao declive da recta tangente. Fica demonstrado graficamente que quando o* $h \to 0$, *a fração* $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *tende para o declive da recta tangente. [Prf e Aln]"*

"Dito de outra forma, o declive m *da tângente* t *ao gráfico de* f *no ponto* P *é o limite do declive da secante quando* $h \to 0$, *e escreve-se [Prf]"*

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad (3)$$

*"A esse limite, quando existe, chama-*se ***derivada da função*** $\boldsymbol{f}$ ***no ponto*** $\boldsymbol{x_0}$. *[Prf]"*

"A expressão (3) nos remete para o nosso problema inicial, o da velocidade média do ciclista. Portanto, se existir o limite da velocidade média, quando $h \to 0$, *então teremos calculada a denominada* **velocidade instantânea do ciclista** *no instante* t_0, *dada por [Prf]"*

$$\lim_{h\to 0} \frac{e(t_0+h)-e(t_0)}{h} \qquad (4)$$

Como se pode apreciar na subsecção III.1, o quadro foi o único instrumento didáctico utilizado pelo professor, e as suas falas transcritas mostram o esforço empreendindo para estimular a imaginação dos alunos na observação e análise das partes que formam o conceito e a sua extensão. Apesar desse esforço, os alunos apresentaram dificuldades para interpretar frases como: "a abcissa $x_0 + h$ toma valores que se aproximam ao valor de x_0", "a recta secante PQ vai se aproximando à recta tangente", "a recta tangente é a posição limite da recta secante", por estarem carregadas de abstrações.

Com o uso do enfoque *CEPSol*, o esforço e as dificuldades descritas acima foram facilmente superadas, para além do recurso tempo devidamente optimizado. Ficou demonstrado que o enfoque *CEPSol é uma metodologia* facilitadora do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos abstractos, fundamentalmente, uma vez que: (i) permite desenvolver habilidades espaciais e de percepção, (ii) melhora os níveis do pensamento intuitivo e a verificação de novas idéias, (iii) permite criar uma atmosfera em que o professor incentiva os alunos a pensar de forma criativa e promover uma abordagem orientada a problemas para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, (iv) fornece um ambiente de aprendizagem interativa, onde os alunos se tornam activos e arquitetos da sua própria aprendizagem.

Entretanto, do ponto de vista prático, para a aplicação do enfoque *CEPSol*, recomenda-se: (i) que o professor tenha prontamente programadas todas as actividades que envolvem o uso de *GeoGebra* a partir de casa; (ii) as actividades programadas devem promover o ambiente investigativo na sala de aula, envolvendo os processos de visualização, interpretação, discussão e argumentação, experimentação e demonstração.

3.3. Avaliação do Nível de Satisfação do Enfoque

O nível de satisfação foi medido numa escala de 1 (nada satisfeita) a 10 (muito satisfeito). O questionário foi o instrumento utilizado e aplicado a uma amostra de 56 alunos seleccionados aleatoriamente. A variável *satisfação* foi tratada como quantitativa no intuito de verificarmos se a sua média é superior a *7*. Aplicamos o teste *t* para uma amostra. Para um nível de significância, $\alpha = 0.05$, estabeleceu-se as seguintes hipóteses do teste:

H_0: *a média da satisfação com a implementação do CEPSol é igual ou inferior a 7.*

H_1: *a média da satisfação com a implementação do CEPSol é maior que 7.*

Conforme o Quadro 1, como $\frac{Sig}{2} = \frac{0,000}{2} < 0,001 \leq \alpha = 0,05$ e $t = 5,082 > 0$, então rejeita-se a hipótese nula, ou seja, aceita-se a hipótese alternativa. Portanto, existem evidências estatísticas para se afirmar que a média da satisfação é superior a *7* ($t_{(55)} = 5,082; p - value < 0,001$), o que revela uma elevada satisfação dos alunos com o enfoque *CEPSol*, já que a média (de satisfação) é significativamente superior a *7*, estimando-se, com *95%* de confiança, que esteja compreendida entre *7,49* e *8,13* pontos.

Quadro 1 – Teste *t* para avaliação do grau de satisfação.

Teste de uma amostra						
	Valor de Teste = 7					
	t	df	Sig. (2 extremidades)	Diferença média	95% Intervalo de Confiança da Diferença	
					Inferior	Superior
Satisfação com o enfoque CEPSol	5,082	55	,000	,80714	,4888	1,1254

Fonte: Quadro gerado com o ambiente *SPSS.*

4. CONCLUSÃO

Apresentamos um novo projecto metodológico baseado no enfoque *CEPSol*, que combina duas abordagens: a perspectiva de resolução de problemas e o uso de ambientes tecnológicos para o Ensino e Aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Os resultados indicam-nos que o enfoque *CEPSol* é uma metodologia promissora para o enriquecimento do quadro de metodologias (clássicas) predominantes na escola angolana, uma vez que permite que os alunos vejam e explorem as relações e os conceitos matemáticos que são difíceis de "visualizar" usando somente o quadro ou papel e caneta como recursos didácticos. Promove, igualmente, um ambiente de aprendizagem cooperativa para a exploração activa de objectos matemáticos através da resolução de um problema, o que permite ao profesor criar o espírito de curiosidade em seus alunos, a inclinação para o trabalho mental independente e mostrar-lhes a conexão do conhecimento matemático com a realidade objectiva e os caminhos para novas descobertas. Com esse enfoque, os alunos são uma parte activa e têm um papel mais activo em todo processo desenvolvido na sala de aulas e fora dela.

À luz do imperativo actual de se mudar o quadro do Sistema Educativo angolano, movido para a Qualidade, exige dos professores de Matemática, fundamentalmente, a mudança de atitudes e de paradigmas, e uma dessas mudanças tem a ver com a aposta no uso das tecnologias para o ensino da matemática, combinado com a perspectiva de resolução de problemas. Portanto, o enfoque *CEPSol* se encaixa perfeitamente na busca de resposta para tal imperativo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Direcção da Escola de Magistério "Suka-Hata" de Cabinda pela disponibilidade das turmas e ao professor Osvaldo Chimbuiti pelas suas valiosas contribuições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Antohe, V. (2010). *New methods of teaching and learning mathematics involved by GeoGebra*. First Eurasia Meeting of GeoGebra (EMG) May 11-13 Proceedings/ed. by Sevinç Gülseçen, Zerrin Ayvaz Reis, Tolga Kabaca.

Dariusz M. (2014). Application of Geogebra for Teaching Mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 8(24), 51 – 54. doi: 10.12913/22998624/567.

Dikovic, L. (2009). Implementing dynamic mathematics resources with geogebra at the college level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning* (IJET), 1(3), 191 – 201. doi:10.3991/ijet.v4i3.784

Follador, D. (2007). *Tópicos Especiais no Ensino de Matemática: Tecnologias e Tratamento da Informação*. Curitiba: Ibpex. Brasil.

Güyer, T. (2008). Computer algebra systems as the mathematics teaching tool. *World Applied Sciences Journal,* 3(1), 132-139.

Hohenwarter M., & Preiner J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, 7. article ID 1448

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of geogebra. *Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3). 126-131

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an international geogebra institute. P*roceedings of British Society for Research into Learning Mathematics,* 27(4), 83-87.

Kllogjeri, P. (2015). *GeoGebra in Teaching and Learning Mathematics in Albanian Secondary Schools*. (PhD Thesis). Institute of Mathematics, University of Miskolc.

Kurnik, Z. (2008). Teaching Methodology of Mathematics: The Scientific Approach to Teaching Math. *Metodika*, 17, 421 – 432.

Machado, N. J. (2001). *Matemática e realidade*. (5ª ed.). São paulo: Cortez.

Majerek, D. (2014). Application of Geogebra for Teaching Mathematics. *Advances in Science and Technology Research Journal*, 8(24), 51 – 54. doi: 10.12913/22998624/567

MATHDebate Project. Analysis of math teaching methodology: collection of related good practices in Europe and beyond. (2017). *Stip: University "Goce Delcev"*. ISBN 978-608-244-445-1. Disponível em:

http://eprints.ugd.edu.mk/18570/1/Analysis%20of%20math%20teaching%20methodology.pdf

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*

Pedroso, S. et al. (2000). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Havana: Editorial Pueblo y Educación.

Polya, G. (1978). *A arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Editora Interciência.

Reisa, Z. A. (2010). Computer supported with geogebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences,* 9, 1449 – 1455. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.348

Rolkouski, E. (2011). *Tecnologias no ensino de Matemática*. Curitiba: Ibpex.

Ross, J. A., & Bruce, C. D. (2009). Student achievement effects of technology-supported remediation of understanding of fractions. *International Journal Math Education Science and Technology,* 40 (6), 713 – 727. doi:10.1080/00207390902971999

Schroeder, T. L., & Lester Jr, F. K. (1989). Developing and Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton & A. P. Shutle (Ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 31 – 42). Reston, VA: NCTM.

Tatar, E. (2012). The effect of dynamic mathematics software on achievement in mathematics: The case of trigonometry. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies.* 4(1), 459 – 468.

Waxman, H., Connell M., & Gray J. (2002). A Quantitative Synthesis of Recent Research on the Effects of Teaching and Learning With Technology on Student Outcomes. *NCREL*, 3 – 29. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/275336825_A_Quantitative_Synthesis_of_Recent_Research_on_the_Effects_of_Teaching_and_Learning_with_Technology_on_Student_Outcomes

Zengin, Y., Furkan H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software Geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31, 183 – 187. doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038